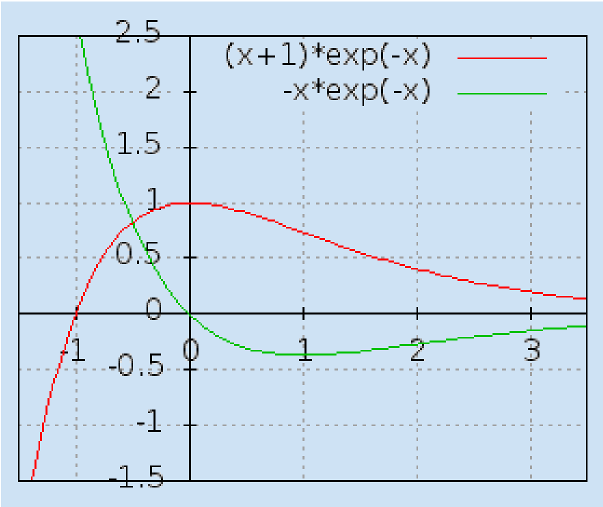
Problem 1. *Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = (x - a)\,e^{-x}$, $a \geq 0$.*
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f_1 sowie den Graphen ihrer Ableitungsfunktion f_a'.



a) *Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und Extrempunkte.*
Ermitteln Sie das Verhalten von f_a für $x \to +\infty$.

[*Zur Kontrolle:* $f_a'(x) = (1 - x - a)\,e^{-x}$]

b) *Zeigen Sie, dass die Graphen von f_a und f_a' genau einen Schnittpunkt S_a haben, und berechnen Sie seine Koordinaten in Abhängigkeit von a.*
Geben Sie die Funktion g an, auf deren Graph alle Schnittpunkte S_a liegen. Bestimmen Sie den Wert von a, für den sich die Graphen von f_a und f_a' rechtwinklig schneiden.

$\left[\text{Zur Kontrolle: } S_a\left(\frac{1}{2} - a \,\middle|\, \frac{1}{2}\,e^{a-\frac{1}{2}}\right)\right]$

Im Folgenden werden die Funktionen f_1 mit $f_1(x) = (x+1)\,e^{-x}$ und f_1' mit $f_1'(x) = -x\,e^{-x}$ betrachtet, deren Graphen in der Abbildung dargestellt sind.

c) *Die Parallele zur y-Achse mit $x = u$, $u \geq 0$, schneidet den Graphen von f_i im Punkt $P_u\big(u|f(u)\big)$ und den Graphen von f_1' im Punkt $Q_u\big(u|f_1'(u)\big)$.*
Die Punkte P_u und Q_u bilden mit dem Schnittpunkt $S_1\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}}\right)$ der Graphen f_1 und f_1' das Dreieck $S_1Q_uP_u$.

Bestimmen Sie $u \geq 0$ so, dass der Flächeninhalt $A(u)$ dieses Dreiecks maximal wird.

$\left[\text{Zur Kontrolle: } A(u) = \left(u^2 + u + \frac{1}{4}\right)\right]$

d) *Die Graphen von f_1 und f_1' schließen mit der Parallelen zur y-Achse mit $x = u,\ u > 0$, ein Fläachenstück ein.*

Ermitteln Sie den Iinhalt dieses Flächenstücks in Abhängigkeit von u.

Prüfen Sie, ob für $u \to +\infty$ das nach rechts unbegrenzte Flächenstück einen endlichen Flächeninhalt besitzt.

Lösung

Betrachtete Funktion und ihre Ableitungen

$f_a(x) = (x+a)\,e^{-x}$
$f_a'(x) = e^{-x} - (x+a)\,e^{-x} = (1-x-a)\,e^{-x}$
$f_a''(x) = -e^{-x} - (1-x-a)\,e^{-x} = (x+a-2)\,e^{-x}$

(a) **Schnittpunkt von Γ_{f_a} mit der y-Achse:**

$y_s = f_a(0) = a$
Der Schnittpunkt ist also $S_y(0|a)$.

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f_a(x_s) = 0 \Leftrightarrow (x_s+a)\,e^{-x_s} = 0$
$\Rightarrow x_s + a = 0 \ \vee \ e^{-x_s} = 0$
Da $e^{-x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ist, folgt $x+a=0 \Leftrightarrow x = -a$.

Extremalpunkte:

$$f_a'(x) = 0 \Rightarrow (1-x-a)\,e^{-x} = 0 \Rightarrow 1-x-a = 0 \Leftrightarrow x = 1-a$$
$$f_a''(1-a) = (1-a+a-2)\,e^{-a-1} = -e^{a-1} < 0$$

Daraus folgt, $P(1-a|\,e^{a-1})$ ist ein Hochpunkt.

Verhalten von f_a für $x \to +\infty$:

Zu betrachten ist
$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+a)\,e^{-x} = 0$$

(b) **Schnittpunkt von f_a und f_a':**

Die Lösungen $x = x_s$ der Gleichung $f_a(x_s) = f_a'(s_s)$ sind die Schnitsstellen von $f_a(x)$ und $f_a'(x)$. Es ist zu zeigen, dass es nur ein x_s gibt, die die Gleichung löst.

$$\begin{aligned} f_a(x_s) &= f_a'(s_s) \\ \Rightarrow (x_s+a)\,e^{-x_s} &= (1-x_s-a)\,e^{-x_s} \\ \Leftrightarrow x_s + a &= 1 - x_s - a \end{aligned}$$

Diese Gleichung besitzt nur eine Lösung, da sie linear ist. Daraus folgt, f_a und f_a' besitzen nur einen Schnittpunkt. Ihre Lösung ist $x_s = \frac{1}{2} - a$.

Bestimmung der y-Koordinate des Schnittpunktes $S(x_s|y_s)$:

$$y_s = f_a\left(\frac{1}{2}-a\right) = \left(\frac{1}{2}-a+a\right)e^{-\left(\frac{1}{2}-a\right)} = \frac{1}{2}\,e^{a-\frac{1}{2}}$$

Damit ergibt sich als Schnippunkt in Abhängigkeit von a

$$s_a\left(\frac{1}{2}-a\,\middle|\,\frac{1}{2}\,e^{a-\frac{1}{2}}\right)$$

Ortskurve der Schnittpunkte

Zwischen dem Schaarparameter a und der Funktionsvariablen x besteht bzgl. der Schnittpunkte folgender Zusammenhang: $x = \frac{1}{2}-a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}-x$. Dies setzen wir in f_a ein und erhalten die Ortskurve

$$O(x) = \left(\frac{1}{2}-a+a\right)e^{-\left(\frac{1}{2}-a\right)} = \frac{1}{2}\,e^{a-\frac{1}{2}}$$

Für welches a ist $f_a \perp f'_a$?

Schnittstelle bei $x_s = \frac{1}{2}-a$. Wir benötigen die Ableitungen von $f_a\left(\frac{1}{2}-a\right)$ und $F'_a\left(\frac{1}{2}-a\right)$

$$f'_a\left(\frac{1}{2}-a\right) = \left(1-\frac{1}{2}+a-a\right)\,e^{a-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,e^{a-\frac{1}{2}}$$

$$f''_a\left(\frac{1}{2}-a\right) = \left(\frac{1}{2}-a+a-2\right)\,e^{a-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}\,e^{a-\frac{1}{2}}$$

Orthogonalitätsbedingung ergibt dann folgende Gleichung:

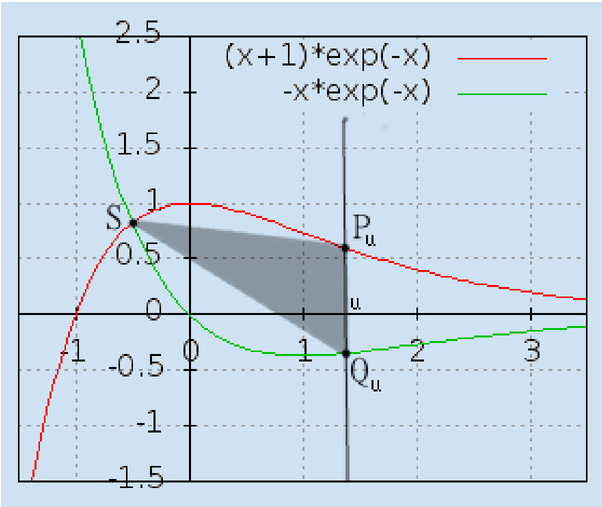
$$\begin{aligned}
f'_a\left(\frac{1}{2}-a\right) &= -\frac{1}{f''_a\left(\frac{1}{2}-a\right)}\\
\Rightarrow \frac{1}{2}\,e^{a-\frac{1}{2}} &= \frac{2}{3e^{a-\frac{1}{2}}}\\
\\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\,e^{2a-1} &= \frac{2}{3}\\
\Leftrightarrow 2a-1 &= \ln\frac{4}{3}\\
\Leftrightarrow a &= \frac{1+\ln\frac{4}{3}}{2}
\end{aligned}$$

Für $a = \frac{1+\ln\frac{4}{3}}{2}$ schneiden sich f_a und f'_a im rechten Winkel.

Im Folgenden sei $a := 1$.

(c) Gesucht ist die Gerade $x = u$ mit $u \geq 0$, die den Flächeninhalt des Dreiecks S, $P\big(u|f_1(u)\big)$, $Q\big(u|f_1'(u)\big)$ maximiert.

<u>Skizze:</u>



Hauptbedingung: $A = \frac{g \cdot h}{2}$
Nebenbedingungen:

1. $h(u) = u - s_x = u + \frac{1}{2}$
2. $g(u) = f_1(u) - f_1'(u) = (u+1)\,e^{-u} + ue^{-u} = (2u+1)\,e^{-u}$

Einsetzen der Nebenbedingungen in die Hauptbedingung ergibt die Zielfunktion:

$$A(u) = \frac{\left(u + \frac{1}{2}\right)(2u+1)\,e^{-u}}{2} = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 e^{-u}$$

Wir suchen das Maximum. Hierfür benötigen wir die ersten beiden Ableitungen von A.

$$\begin{aligned} A'(u) &= 2\left(u + \frac{1}{2}\right)e^{-u} - \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 e^{-u} \\ &= \left[2\left(u + \frac{1}{2}\right) - \left(u + \frac{1}{2}\right)^2\right] e^{-u} \end{aligned}$$

$$A''(u) = \left[2 + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(u + \frac{1}{2}\right)\right] e^{-u}$$

Notwendige Bedingung für Extrema ergibt

$$\begin{aligned} A'(u) = 0 \Rightarrow \left[2\left(u+\frac{1}{2}\right) - \left(u+\frac{1}{2}\right)^2\right] e^{-u} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\left(u+\frac{1}{2}\right) - \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \overset{z:=u+\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} 2z - z^2 = 0 \Leftrightarrow z(z-2) &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Lösungen $z_1 = 0$ und $z_2 = 2$.
Rücksubstitution ergibt $u_1 = -\frac{1}{2}$ und $u_2 = \frac{3}{2}$. Da $u \geq 0$ gefordert ist, kommt u_1 als Lösung nicht in Frage. Bleibt zu überprüfen, ob bei $u_2 = \frac{3}{2}$ ein Maximum liegt:
Ein Maximum liegt dann vor, wenn die zweite Ableitung < 0 ist.

$$A''\left(\frac{3}{2}\right) = (2+2-4\cdot 2)e^{-\frac{3}{2}} = -4e^{-\frac{3}{2}} < 0$$

Bei $u = \frac{3}{2}$ liegt also das gesuchte Maximum.

(d) Zu lösen ist das Integral

$$\begin{aligned} A(u) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{u} \left((x+1)\,e^{-x} + xe^{-x}\right) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{u} (2x+1)\,e^{-x} dx \\ &= \Big[-(2x+1)\,e^{-x}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{u} + 2\int_{-\frac{1}{2}}^{u} e^{-x} \\ &= \Big[-(2x+3)\,e^{-x}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{u} \\ &= \Big[(2x+3)\,e^{-x}\Big]_{u}^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2\sqrt{e} - (2u+3)\,e^{-u} \end{aligned}$$

Ist das Flächenstück für $u \to +\infty$ endlich?

Zu untersuchen ist das rechtsseitige Globalverhalten von $A(u)$, also

$$\lim_{u\to+\infty} A(u) = \lim_{u\to+\infty} \left(2\sqrt{e} - (2u+3)\,e^{-u}\right) = 2\sqrt{e} < +\infty$$

Das nach rechts unbegrenzte Flächenstück besitzt einen endlichen Flächeninhalt.