Fehlerfortpflanzung

Bernhard Möller

11. Mai 2007

Durch eine Bestimmungsgleichung soll die Größe y bestimmt werden nach

$$y = \alpha \frac{u + \beta v^3}{w} + v^3 \ln(\gamma x)$$

wobei gilt: $x^2 = u + \delta w$.

- a) Wenn jede der Größen u, v, w, x mit einem zugehörigen Fehler $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta x$ behaftet ist, wie groß ist dann der maximale Fehler Δy für y entsprechend der Fehlerfortpflanzungsrechnung?

Da x keine unabhängige Variable ist, sondern $x = x(u, w)$ ist, gilt $y = y(u, v, w)$. Zu betrachten haben wir also die Funktion

$$y(u, v, w) = \alpha \frac{u + \beta v^3}{w} + v^3 \ln(\gamma \sqrt{u + \delta w}).$$

Allgemein ist die Fehlerfortpflanzungsgleichung für eine einmal total differenzierbare Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ mit den zugehörigen Fehlern $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ gegeben durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Für den maximalen Fehler Δy ergibt das

$$\begin{aligned} \Delta y &= \left| \frac{\partial y(u, v, w)}{\partial u} \right| \Delta u + \left| \frac{\partial y(u, v, w)}{\partial v} \right| \Delta v + \left| \frac{\partial y(u, v, w)}{\partial w} \right| \Delta w \\ &= \left| \frac{\alpha}{w} + \frac{\gamma v^3}{2\sqrt{u + \delta w}} \frac{1}{\gamma \sqrt{u + \delta w}} \right| \Delta u + 3 \left| \frac{\alpha \beta v^2}{w} + v^2 \ln(\gamma \sqrt{u + \delta w}) \right| \Delta v + \\ &\quad \left| -\alpha \frac{u + \beta v^3}{w^2} + \frac{\gamma \delta v^3}{2\sqrt{u + \delta w}} \frac{1}{\gamma \sqrt{u + \delta w}} \right| \Delta w \\ &= \left| \frac{\alpha}{w} + \frac{v^3}{2(u + \delta w)} \right| \Delta u + 3v^2 \left| \frac{\alpha \beta}{w} + \ln(\gamma \sqrt{u + \delta w}) \right| \Delta v + \\ &\quad \left| \alpha \frac{u + \beta v^3}{w^2} + \frac{\delta v^3}{2(u + \delta w)} \right| \Delta w \end{aligned}$$

Für Δx erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta x &= \left| \frac{\partial x(u, w)}{\partial u} \right| \Delta u + \left| \frac{\partial x(u, w)}{\partial w} \right| \Delta w \\ &= \frac{\Delta u + |\delta| \Delta w}{2\sqrt{u + \delta w}} \end{aligned}$$

b) Welche notwendigen Bedingungen bezüglich der Dimensionen müssen die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erfüllen, wenn u, v, w die folgenden Dimensionen haben:

$$[u] = [w] = \left(\frac{m}{s}\right)^3 \text{ und } [v] = \frac{m}{s}$$

Aus den Gleichungen für y und für die Fehlerabschätzung Δy lassen sich folgende Bedingungen für α, β, γ und δ extrahieren:

1. $\left[\frac{\alpha}{w}\right] = 1 \Leftrightarrow [\alpha] = [w] = \left(\frac{m}{s}\right)^3$
2. $[u + \beta v^3] = [u] \wedge [u] = [v]^3 \Rightarrow [\beta] = 1$
3. $[\gamma x] = 1 \Leftrightarrow [\gamma] = [x^{-1}] = \left(\frac{s}{m}\right)^{\frac{3}{2}}$
4. $[u + \delta w] = [u] \wedge [u] = [w] \Rightarrow [\delta] = 1$