Kreistangenten

Bernhard Möller

26. Juli 2014

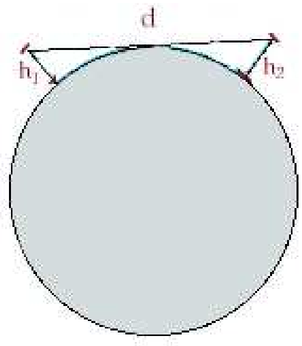
Zusammenfassung

Schon in der Antike wussten helenische Gelehrte, dass die Erde eine Kugel ist. Man war sogar in der Lage, recht genau den Umfang der Erde und somit den Erdradius zu bestimmen. Damit waren die Helenen der Antike schon weiter als die Europäer des 15. Jahrhunderts.

In diesem kleinen Manuskript will ich mich aber nicht mit der Bestimmung des Erdradius befassen, sondern mit der Höhenbestimmung von Türmen unter Verwendung von Kreistangenten. Zur Lösung dieses Problems führen zwei Wege, die ich beide hier aufführen werde.

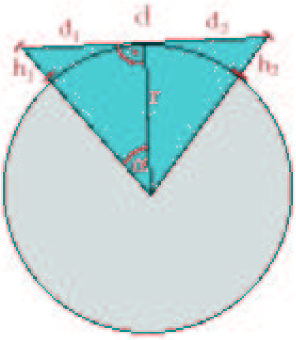
Problem. *Ein Mann befindet sich auf einem Turm und sieht sich um. In der Ferne kann er gerade so über der Horizontlinie die Spitze eines zweiten Turmes sehen. Die Höhe seines Turmes ist ihm bekannt; er ist* $200\,m$ *hoch. Die Strecke zum zweiten Turm ist ihm ebenfalls bekannt, sie beträgt* $100\,km$ *(Sichtlinie). Der Erdradius* r *beträgt am Äquator* $6378\,km$*. Wie hoch ist der zweite Turm?*

Skizze:



1 Lösung mittels trigonometrischer Funktionen

Skizze:



Der Graf einer Kreistangente verläuft stets orthogonal zum Kreisradius ($r \perp t$). D.h. wir können, wie auf der Abbildung dargestellt, eine Zerlegung in zwei rechtwinklige Dreiecke vornehmen und können somit die Sätze trigonometrischer Abbildungen anwenden ...

Es gilt

$$\cos\alpha = \frac{r}{r+h_1} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{r}{r+h_1}$$

d_1 lässt sich so leicht ermitteln durch

$$\tan\alpha = \frac{d_1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad d_1 = r\tan\alpha$$
$$\Leftrightarrow \quad d_1 = r\tan\left(\arccos\frac{r}{r+h_1}\right)$$

Für die Bestimmung von d_2 kann man analog vorgehen und erhält

$$d_2 = r\tan\left(\arccos\frac{r}{r+h_2}\right)$$

Diese Gleichung lässt sich leicht nach h_2 auflösen und erhält:

$$h_2 = r\left(\frac{1}{\cos\left(\arctan\frac{d_2}{r}\right)} - 1\right)$$

Da aber $d = d_1 + d_2 \;\Leftrightarrow\; d_2 = d - d_1$ gilt:

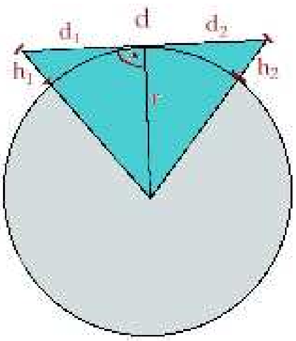
$$d_2 = d - r\tan\left(\arccos\frac{r}{r+h_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = r\left\{\frac{1}{\cos\left[\arctan\left(\frac{d-r\tan\left(\arccos\frac{r}{r+h_1}\right)}{r}\right)\right]} - 1\right\}$$

Setzt man die Werte ein, so erhält man für h_2 eine Höhe von ca. 192m.

2 Lösung mittels des pythagoräischen Lehrsatzes

Skizze:



Dieses Problem lässt sich auch durch Anwendung des Satzes von Pythagoras lösen...

Wir wenden den Satz an, um d_1 zu bestimmen.

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (r+h_1)^2 - r^2 \;\Leftrightarrow\; d_1^2 = r^2 + 2h_1 r + h_1^2 \\ \Leftrightarrow\; d_1^2 &= h_1(2r+h_1) \\ \Rightarrow\; d_1 &= \sqrt{h_1(2r+h_1)} \end{aligned}$$

Analog erhält man den Ausdruck für d_2:

$$d_2 = \sqrt{h_2(2r+h_2)}$$

Durch die Beziehung $d_2 = d - d_1$ lässt sich die Unbekannte d_2 eliminieren, so dass die obige Gleichung einfach nach h_2 aufgelöst werden muss. Ist dies erreicht, sind wir schon so gut wie fertig:

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{h_2(2r+h_2)} = \sqrt{2h_2 r + h_2^2} \\ \Leftrightarrow\; d_2^2 + r^2 &= (h_2+r)^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{d_2^2+r^2} = h_2 + r \\ \Leftrightarrow\; h_2 &= \sqrt{d_2^2+r^2} - r \end{aligned}$$

Jetzt muss nur noch d_2 durch $d - d_1$ ausgedrückt und d_1 durch den entsprechenden Term ersetzt werden.

$$\begin{aligned} h_2 &= \sqrt{d_2^2+r^2} - r = \sqrt{(d-d_1)^2 + r^2} - r \\ &= \sqrt{d^2 - 2dd_1 + d_1^2 + r^2} - r \\ h_2 &= \sqrt{d^2 - 2d\sqrt{h_1(2r+h_1)} + h_1(2r+h_1) + r^2} - r \end{aligned}$$

Auch hier erhält man nach Einsetzen der Werte das korrekte Ergebnis $h_2 = 192\text{m}$.