Laufzeitmassenspektrometer

Bernhard Möller

1. Mai 2007

In einem Laufzeitmassenspektrometer sollen durch eine Zieh-Gitterelektrode die davor befindlichen O_2^+- und N_2^+-Ionen aus einem Raum mit dem Potential 0 durch eine Spannung $U_0 = -100\,V$ herausgezogen werden. (Masse des O_2^+-Ions: $2 \cdot 16 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg und Masse des N_2^+-Ions: $2 \cdot 14 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg)

a) Wie hoch ist die Geschwindigkeit der beiden Ionenarten beim Durchschritt durch das Ziehgitter? Ist es gerechtfertigt, relativistische Korrekturen zu unterlassen?

Es gilt

$$t = \frac{s}{v} = \sqrt{\frac{m}{Z}} \frac{s}{\sqrt{2e_0U_0}}$$

Da es sich um einfach ionisierte Gase handelt, gilt $Z = 1$. Daraus ergibt sich folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{s}{v} &= \sqrt{m}\frac{s}{\sqrt{2e_0U_0}} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v} &= \sqrt{\frac{m}{2e_0U_0}} \\ \Leftrightarrow \quad v &= \sqrt{\frac{2e_0U_0}{m}} \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$\begin{aligned} v_{O_2^+} &= \sqrt{\frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}C \cdot 100V}{16 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg}} &\approx& \quad 24.485{,}73\,\frac{m}{s} \\ v_{N_2^+} &= \sqrt{\frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}C \cdot 100V}{14 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg}} &\approx& \quad 26.176{,}34\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

Um abzuschätzen, ob eine relativistische Korrektur vorzunehmen ist, genügt es, den Quotienten $\frac{v_{N_2^+}}{c}$ zu betrachten. Da dieser den Wert $8{,}73 \cdot 10^{-4} \ll 1$ besitzt, kann eine relativistische Korrektur unterbleiben.

b) Nach welcher Zeit treffen die Ionen auf einen Detektor auf, der sich im Abstand von $0{,}5\,m$ auf gleichem Potential $U_0 = -100\,V$ befindet?

Da $\Phi_{Ziehgitter} = \Phi_{Target}$, gilt $U' = \Phi_{Ziehgitter} - \Phi_{Target} = 0$. Daher ist dieser Raum kräftefrei und es gilt $t = \frac{s}{v} = \frac{L}{v}$. Hieraus ergeben sich für die Ionen folgende Werte:

$$\begin{aligned} t_{O_2^+} &= \frac{L}{v_{O_2^+}} &\approx& \quad 2,042 \cdot 10^{-5}\, s \\ t_{N_2^+} &= \frac{L}{v_{N_2^+}} &\approx& \quad 1,91 \cdot 10^{-5}\, s \end{aligned}$$
.

c) Zur Verkürzung der geometrischen Laufstrecke werde nun bei $L/2 = 0,25\, m$ ein (unendlich ausgedehnter) elektrischer Spiegel angebracht, der sich auf dem Potential $U_1 = +100\, V$ befinde. Die Ionen werden von dem Spiegel zurückgeworfen und auf einen Detektor hinbeschleunigt, der in der Ebene des Ziehgitters angebracht ist und sich auf dessen Potential U_0 befindet. (Die seitlichen Abstände und die seitliche Ionenbewegung seien vernachlässigt.
Geben Sie allgemein die Ionenlaufzeit als Funktion von U_0, der Potenzialdifferenz $\Delta U := U_1 - U_0$ und der Ionenmasse m an und berechnen sie die Ionenlaufzeiten t_3 und t_4.

Es gilt allgemein für ein statisches, elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \nabla \Phi(\vec{x})$$

Wir betrachten uns hier den eindimensionalen Fall, so daß gilt

$$E(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$$

Hierbei handelt es sich um ein Feld zwischen zwei geladenen Platten, d.h. $E(x) = const. = E$ und es gilt

$$\Phi(x) = \int_0^x E(x')\, dx' = E \int_0^x dx' = xE$$

weiterhin gilt $U_1 = \Phi\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}E$ und $\Phi(0) = U_0$). Aus $\Delta U = U_1 - U_0$ folgt dann unmittelbar

$$\Delta U = \frac{L}{2}E - U_0 \;\Leftrightarrow\; E = \frac{2(\Delta U + U_0)}{L}$$

Einerseits gilt nun $F(x) = e_0 E(x)$ und andererseits $F(x) = ma(x)$. Da E konstant ist, folgt unmittelbar, daß $a(x) = a$ konstant ist, und es gilt

$$ma = e_0 E = \frac{2e_0(\Delta U + U_0)}{L} \;\Leftrightarrow\; a = \frac{2e_0(\Delta U + U_0)}{mL}$$

Für den Umkehrpunkt gilt nun $0 = v - at \;\Leftrightarrow\; t = \frac{v}{a}$. Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned} t &= \frac{v}{\frac{2e_0(\Delta U + U_0)}{mL}} = \frac{\sqrt{\frac{2e_0 U_0}{m}}\, mL}{2e_0(\Delta U + U_0)} \\ \Leftrightarrow\quad t(U_0, \Delta U, m) &= \frac{L}{2(\Delta U + U_0)}\sqrt{\frac{2mU_0}{e_0}} \qquad : \; T(U_0, \Delta U, m) = 2t(U_0, \Delta U, m) \\ \Rightarrow\quad T(U_0, \Delta U, m) &= \frac{L}{\Delta U + U_0}\sqrt{\frac{2mU_0}{e_0}} \end{aligned}$$

Somit ergeben sich folgende Werte für

$$
\begin{aligned}
T(U_0, \Delta U, m_{O_2^+}) &= \frac{L}{\Delta U + U_0}\sqrt{\frac{2m_{O_2^+}U_0}{e_0}} \;\approx\; 4{,}084 \cdot 10^{-5}\, s \\
T(U_0, \Delta U, m_{N_2^+}) &= \frac{L}{\Delta U + U_0}\sqrt{\frac{2m_{N_2^+}U_0}{e_0}} \;\approx\; 3{,}82 \cdot 10^{-5}\, s \\
&.
\end{aligned}
$$

d) Welche Beziehung muß allgemein zwischen dem Faktor α bestehen, um den die Laufstrecke verkürzt ist und ΔU und U_0, wenn gleiche Laufzeiten resultieren sollen?

Zwischen Momentangeschwindigkeit und Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung gilt folgender Zusammenhang: $\bar{v} = \frac{1}{2}v$. Damit läßt sich die benötigte Zeit wie folgt schreiben:

$$\bar{v} = \frac{s}{T} \;\Leftrightarrow\; T = \frac{s}{\bar{v}} = \frac{2s}{v}$$

Andererseits ist $t = \frac{L}{v}$ und es soll gelten T=t.

$$\Rightarrow\; \frac{\alpha L}{v} = \frac{2s}{v} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{2s}{L} \quad (*)$$

Bestimmung von s aus dem Wege-Zeit-Gesetz:

Es gilt

$$
\begin{aligned}
s &= at^2 \\
&= \frac{2e_0(\Delta U + U_0)}{mL}\, t^2(m, U_0, \Delta U) \\
&= \frac{4e_0(\Delta U + U_0)}{mL}\,\frac{L^2}{4(\Delta U + U_0)^2}\,\frac{mU_0}{e_0} \\
s &= \frac{LU_0}{\Delta U + U_0}
\end{aligned}
$$

Dies setzen wir in (*) ein und erhalten

$$\alpha = \frac{2U_0}{\Delta U + U_0} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{2}{1 + \frac{\Delta U}{U_0}}$$

Setzen wir nun die Werte ein, so erhalten wir $\alpha = \frac{2}{3}$.