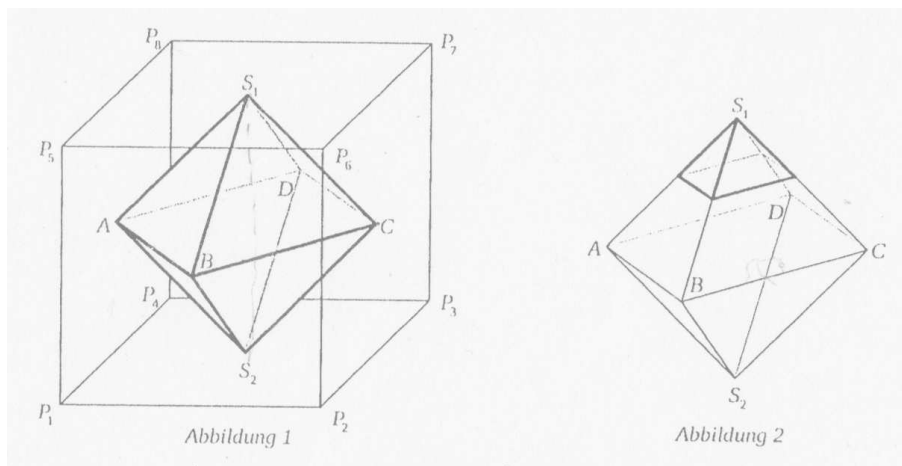


Oktaeder

Bernhard Möller

22. Dezember 2010

Ein Oktaeder ist ein regelmäßiges Polyeder, dessen Oberfläche aus acht kongruenten, gleichseitigen Dreiecken besteht. Jedes Oktaeder kann einem Würfel so einbeschrieben werden, dass die Ecken des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen des Würfels liegen. Von dem in der Abbildung 1 dargestellten Oktaeder $ABCD S_1 S_2$ sind die Eckpunkte $A(13| - 5|3)$, $B(11|3|1)$, $C(5|3|7)$ und $S_1(13|1|9)$ gegeben. Dieses Oktaeder ist auf die oben genannte Art dem abgebildeten Würfel mit den Ecken P_1 bis P_8 einbeschrieben.



- Den Abstand zweier paralleler Seitenflächen eines Oktaeders nennt man „Dicke des Oktaeders“. Berechnen Sie die Dicke des abgebildeten Oktaeders als Abstand des Punktes C von der Ebene ABS_1 .
- Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte P_6 und P_8 .
- Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ sei M_{AB} , der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ sei M_{CD} ; g sei die Gerade, die durch diese Punkte M_{AB} und M_{CD} verläuft. Das Oktaeder wird um die Gerade g als Drehachse so gedreht, dass sich der Punkt $A(13| - 5|3)$ in die neue Position $A'(12 + 2\sqrt{2}|\sqrt{2} - 1|2 + 2\sqrt{2})$ bewegt. Zeigen Sie, dass der zugehörige Drehwinkel $\alpha = 90^\circ$ beträgt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes B' als neue Koordinaten des Punktes B nach der Drehung.

- Durch

$$E_a : 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 9(2a - 5) = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

sei eine Schar von Ebenen E_a gegeben; h sei die Gerade, die durch die Punkte S_1 und $S_2(5|-3|1)$ verläuft.

Zeigen Sie, dass jede Ebene E_a der Schar orthogonal zur Gerade h verläuft.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt P_a der Ebene E_a mit der Geraden h .

[Zur Kontrolle: $P_a(13 - 4a|1 - 2a|9 - 4a)$]

Für $0 < a \leq 1$ schneidet die Ebene E_a von dem abgebildeten Oktaeder eine Pyramide mit der Spitze S_1 ab (siehe Abbildung 2).

Ermitteln Sie das Volumen V_a der abgeschnittenen Pyramide.

Musterlösung

Benötigte Vektoren:

Ortsvektoren:

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{OS}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \vec{OS}_2 &= \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{OA'} = \begin{pmatrix} 12 + 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 1 \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vektoren:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AS}_1 = \vec{OS}_1 - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BS}_1 = \vec{OS}_1 - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CS}_1 = \vec{OS}_1 - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) **Berechnen Sie die Dicke des abgebildeten Oktaeders als Abstand des Punktes C von der Ebene ABS_1 .**

$$\vec{n}' = \vec{AS}_1 \times \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 48 \\ -12 - 0 \\ 0 + 12 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\vec{n} := \frac{1}{12}\vec{n}'$, dann ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Ebene ABS_1 ist dann gegeben durch

$$E_{ABS_1} : (\vec{x} - \vec{OS_1}) \cdot \vec{n} = 0.$$

Die Gerade g ist gegeben durch

$$g : \vec{x} = \lambda \vec{n} + \vec{OC}.$$

Berechnung des Schnittpunktes von E_{ABS_1} und g :

Die Geradengleichung von g in die Ebenengleichung einsetzen, um λ zu bestimmen.

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{n} + \vec{OC} - \vec{OS_1}) \cdot \vec{n} = 0 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{(\vec{OS_1} - \vec{OC}) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \\ &= \frac{\vec{CS_1} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gerade g ergibt den Schnittpunkt P_s :

$$\vec{OP_s} = \frac{\vec{CS_1} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} + \vec{OC}$$

Der Abstand d ergibt sich durch

$$d = |\vec{OP_s} - \vec{OC}| = \left| \frac{\vec{CS_1} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \right| = \left| \frac{\vec{CS_1} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \right| \|\vec{n}\| = \frac{|\vec{CS_1} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Einsetzen ergibt

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{27}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Die Dicke des Oktaeders beträgt $d = 4\sqrt{3}$.

b) **Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte P_6 und P_8 .**

$$\vec{OP_6} = \vec{OS_1} + \vec{AB} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP_8} = \vec{OS_1} - \vec{AB} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Die gesuchten Punkte haben die Koordinaten $P_6(11|9|7)$ und $P_8(15|-7|11)$.

c) **Zeigen Sie, dass der zugehörige Drehwinkel $\alpha = 90^\circ$ beträgt.**

Falls der Drehwinkel $\alpha = 90^\circ$ ist, muss das Skalarprodukt der sie einschließenden Vektoren verschwinden. Zu zeigen ist also

$$(\vec{OM}_{AB} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OM}_{AB} - \vec{OA}') = 0.$$

Nun ist

$$\vec{OM}_{AB} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB}.$$

Dies setzen wir ins obige Skalarprodukt ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB} - \vec{OA} \right) \cdot \left(\vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB} - \vec{OA}' \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \left(\vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB} - \vec{OA}' \right) \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 + 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 1 \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \right] \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2}(-2 + 4 - 2) = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung ist also erfüllt. Daraus folgt $\alpha = 90^\circ$.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes B' als neue Koordinaten des Punktes B nach der Drehung.

Sei $\vec{AA'}$ der Vektor, der von $\vec{OA}$ auf $\vec{OA'}$ zeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{OB'} &= \vec{OB} - \vec{AA'} \quad \text{mit} \quad \vec{AA'} = \vec{OA'} - \vec{OA} \\ \Rightarrow \vec{OB'} &= \vec{OB} + \vec{OA} - \vec{OA'} \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\vec{OB'} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 + 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 1 \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 2\sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \\ 2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die neuen Koordinaten sind also $B'(12 - 2\sqrt{2} | -1 - \sqrt{2} | 2 - 2\sqrt{2})$.

d) **Zeigen Sie, dass jede Ebene E_a der Schar orthogonal zur Gerade h verläuft.**

Die Gerade h hat die Form

$$h : \vec{x} = \vec{OS_1} + \lambda \vec{S_2S_1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sei ferner $\vec{n}_a$ der zugehörige Normalenvektor auf E_a . Zu zeigen ist also $\vec{n}_a \parallel \vec{S_2S_1} \quad \forall a \in \mathbb{R}$. Die beiden Vektoren sind genau dann (anti)parallel, falls es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\lambda \vec{n}_a = \vec{S_2S_1}$ gilt.

Bestimmung der Vektoren $\vec{n}_a$ und $\vec{S_2S_1}$:

$$E_a : 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 9(2a - 5) = 0 \Rightarrow \vec{n}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =: \vec{n}$$

Da der Normalenvektor invariant bzgl. des Scharparameters a ist, sind alle Ebenen E_a zueinander parallel.

$$\vec{S_1S_2} = \vec{OS_2} - \vec{OS_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es ist offensichtlich, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda = -1$ gibt, denn

$$-1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aus $\vec{n} \perp E_a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ und $\vec{n} \parallel \vec{S_2S_1}$ folgt unmittelbar, dass $h \perp E_a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ ist.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt P_a der Ebene E_a mit der Geraden h .

$P_a = E_a \cap h$. Die Gerade h ist durch die Gleichung

$$h : \vec{x} = \vec{OS_1} + \lambda \vec{S_2S_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

gegeben. Um λ_a zu bestimmen, setzen wir Die Geradengleichung von E_a in die Ebenengleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= 2(2\lambda_a + 13) + \lambda_a + 1 + 2(2\lambda_a + 9) + 9(2a - 5) \\ \Leftrightarrow 0 &= 9\lambda_a + 18a \\ \Leftrightarrow \lambda_a &= -2a. \end{aligned}$$

Dies setzen wir in die Geradengleichung ein und erhalten

$$\vec{OP_a} = -2a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 - 4a \\ 1 - a \\ 9 - 4a \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind gegeben durch $P_a(13 - 4a | 1 - a | 9 - 4a)$.

Ermitteln Sie das Volumen V_a der abgeschnittenen Pyramide.

Da die Oberfläche eines Oktaeders aus gleichseitigen Dreiecken besteht und $E_a \perp h$ für alle $a \in \mathbb{R}$ ist, folgt

1. die Schnittfläche von E_a und dem Oktaeder ist ein Quadrat.
2. der Mantel der durch E_a abgeschnittenen Pyramide besteht aus gleichseitigen Dreiecken.

Sei nun $|\vec{v}_a|$ die Seitenlänge der abgeschnittenen Pyramide. Dann gilt für das Volumen

$$V_a = \frac{1}{3} |\vec{v}_a|^2 |\vec{h}_a| \quad \text{mit } \vec{h}_a = \vec{OS}_1 - \vec{OP}_a.$$

Folgend werden die Vektoren $\vec{v}_a$ und $\vec{h}_a$ bestimmt. Wir betrachten uns die Gerade

$$g_1 : \vec{x} = \lambda \vec{AS}_1 + \vec{OS}_1 = \lambda(\vec{OS}_1 - \vec{OA}) + \vec{OS}_1 = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Nun muss der Schnittpunkt P_1 der Geraden g_1 mit der Schnittebene E_a ermittelt werden.

Wir setzen die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein und bestimmen λ_a :

$$\begin{aligned} 0 &= 26 + 3\lambda_a + 1 + 2(3\lambda_a + 9) + 9(2a - 5) \\ \Leftrightarrow 0 &= 9\lambda_a + 18a \\ \Leftrightarrow \lambda_a &= -2a \end{aligned}$$

Einsetzen in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt $\vec{OP}_1$.

$$\vec{OP}_1 = -2a \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 - 6a \\ 9 - 6a \end{pmatrix}$$

Nun ist

$$\vec{v}_a := \vec{S_1P_1} = \vec{OP}_1 - \vec{OS}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 - 6a \\ 9 - 6a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6a \\ -6a \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{h}_a := \vec{P_aS_1} = \vec{OS}_1 - \vec{OP}_a = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 - 4a \\ 1 - 2a \\ 9 - 4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a \\ 2a \\ 4a \end{pmatrix}$$

Dies setzen wir nun in die Volumenformel ein und erhalten

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{1}{3} |\vec{v}_a|^2 |\vec{h}_a| \\ &= \frac{1}{3} \underbrace{\sqrt{36a^2 + 36a^2}}_{72a^2} \cdot \underbrace{\sqrt{16a^2 + 4a^2 + 16a^2}}_{6a} \\ &= 144a^3 \end{aligned}$$

Das Volumen der Pyramide beträgt $V_a = 144a^3$.