Analytische Geometrie – Projektion

Bernhard Möller

14. Juli 2014

1 Normalalendarstellung einer Ebene

Bereits bekannt ist die Parameterdarstellung einer Ebene. Sie lautet folgendermaßen:

Definition 1.1 (Parameterdarstellung einer Ebene)**.** *Seien $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Ferner seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ zwei linear unabhängige Vektoren und $P \in E$ ein Punkt in der Ebene E. Dann ist der Ortsvektor $x \in \mathbb{R}^3$ zu jedem Punkt $X \in E$ gegeben durch*

$$E: \ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

$\vec{u}, \vec{v}$ heißen Richtungsvektoren, $\overrightarrow{OP}$ heißt Fixpunktvektor und λ, μ heißen Parameter der Ebene *E.*

Definition 1.2 (Kreuzprodukt)**.** *Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Das Kreuzprodukt (oder auch Vektorprodukt) ist eine lineare Abbildung folgender Gestalt:*

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{a}, \vec{b}) &\longmapsto \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

Seien nun $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben durch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

dann ist das Kreuzprodukt definiert durch

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Satz 1.1. *Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, dann gilt*

1. *Das Vektorprodukt ist linear.*
2. *Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ.*
3. *Das Vektorprodukt ist orthogonal zu seinen Faktoren. $\vec{a} \perp \vec{b} \ \Leftrightarrow \ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$*

Ferner folgt daraus, daß $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

Unser Ziel ist, eine andere Darstellung einer Ebene zu finden. Zunächst einmal überlegen wir uns, wie eine eine Ebene eindeutig zu definieren ist. Zu bestimmen ist die Lage der Ebene im Raum und ein Fixpunkt.
Die Idee ist, die Lage durch einen Vektor zu definieren, der Senkrecht auf der Ebene E steht. Er wird als *Normale* $\vec{n}$ der Ebene E bezeichnet. Dieser Vektor ist zu jedem Vektor, der parralel zur Ebene E liegt orthogonal, so auch zu den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Um $\vec{n}$ zu bestimmen, verwenden wir das Kreuzprodukt.
Sei nun $P \in E$ beliebig. Für jeden Punkt $X \in E$ ist Die Differenz $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$ parallel zu E. Sei nun $\vec{n} := \vec{u} \times \vec{v}$. Nach Satz 1.1 ist $\vec{n} \perp E$ und es muß gelten

$$\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) = 0.$$

Ausmultiplizieren ergibt $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$.
Wir setzen $\vec{x} := \overrightarrow{OX}$ und $d := \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$. Die Ebenengleichung geht dann in folgende Form über:

$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{x} - d = 0}$$

Der Skalar d legt den Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung fest.

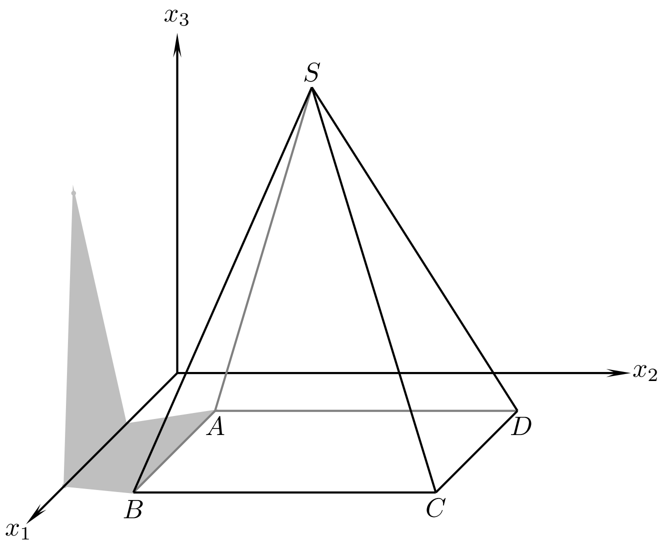
2 Parallelprojektion

1. (a) Berechnen und zeichnen Sie den Schatten, der entsteht, wenn die quadratische Pyramide mit der Kantenlänge 4 Koordinateneinheiten und der Höhe 5 Koordinateneinheiten von der Sonne beschienen wird und die Sonnenstrahlen die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ haben. Der Punkt A habe die Koordinaten $A(1|1|0)$

   (b) Parallele Lichtrahlen fallen aus der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf die Pyramide. Berechnen und zeichnen Sie den Schatten, der am Boden und an der Wand (x_2-x_3-Ebene) entsteht.

   (c) Bearbeiten Sie die Fragestellung für eine Zentralprojektion mit einer Lichtquelle in $L(0|2|10)$.

Skizze:



(b) **Berechnung der Ortsvektoren $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ und $\overrightarrow{OS}$:**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\\ &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}\\ &= \begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}\\ &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + {}^t(0,0,5)\\ &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Bestimmung der Projektionsgeraden und der Spurpunkte:
Es ist hier eleganter, die Schnittpunkte von Projektionsgeraden Und Ebenen mittels der

Normalenform der Ebene zu ermitteln. Sei nun $\overrightarrow{OP}$ Fixpunktvektor von E, dann lautet ihre Normalengleichung:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OP}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \ \vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} &= 0 \qquad ; \ d := \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} \\ \Rightarrow \ \vec{n} \cdot \vec{x} - d &= 0 \end{aligned}$$

Um den Schnittpunkt $\overrightarrow{OP'}$ von einer Geraden

$$g: \ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}$$

mit der Ebene E zu bestimmen, setzt man Geraden- und Ebenengleichung gleich und es gilt

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}) - d &= 0 \\ \Leftrightarrow \ \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{n} \cdot \vec{v} &= d \\ \Leftrightarrow \ \frac{d - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} &= \lambda \end{aligned}$$

Nun können wir λ in die Geradengleichung von g einsetzen und erhalten den Schnittpunkt

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \frac{d - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}}{\vec{n} \cdot \vec{v}} \vec{v}.$$

Bestimmung des Spurpunktes $\overrightarrow{OS''}$ auf der x_1-x_2-Ebene (E_1):
Seien nun $\hat{x}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{x}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{x}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Als Fixpunktvektor $\overrightarrow{OP}$ der Ebene E_1 wählen wir $\vec{0}$. Damit ergibt sich für E_1 folgende Gleichung:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = 0$$

Nun ist

$$\vec{n} = \hat{x}_1 \times \hat{x}_2 = \hat{x}_3$$

und erhalten

$$\hat{x}_3 \cdot \vec{x} = 0.$$

Dies können wir in die Schnittpunktgleichung einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OS''} &= \overrightarrow{OS} - \frac{\hat{x}_3 \cdot \overrightarrow{OS}}{\hat{x}_3 \cdot \vec{v}}\,\vec{v} \\
&= \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0,5\\-2\\-1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}0,5\\-2\\-1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}0,5\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,5\\-7\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Berechnung der Spurlinien auf E_1:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AS''} &= \overrightarrow{OS''} - \overrightarrow{OA} \\
&= \begin{pmatrix}0,5\\-7\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,5\\-8\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BS''} &= \overrightarrow{OS''} - \overrightarrow{OB} \\
&= \begin{pmatrix}0,5\\-7\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4,5\\-8\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Spurgeraden

$$g_{AS''} : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AS''}$$

und

$$g_{BS''} : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{BS''}$$

Berechnung der Spurpunkte A', B' und S' auf der x_1-x_3-Ebene:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA'} &= \overrightarrow{OA} - \frac{\hat{x}_2 \cdot \overrightarrow{OA}}{\hat{x}_2 \cdot \overrightarrow{AS''}}\,\overrightarrow{AS''} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-0,5\\-8\\0\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}-0,5\\-8\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-0,5\\-8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{15}{16}\\0\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OB'} &= \overrightarrow{OB} - \frac{\hat{x}_2 \cdot \overrightarrow{OB}}{\hat{x}_2 \cdot \overrightarrow{BS''}}\, \overrightarrow{BS''} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -4,5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4,5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{7}{16} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OS'} &= \overrightarrow{OS} - \frac{\hat{x}_2 \cdot \overrightarrow{OS}}{\hat{x}_2 \cdot \vec{v}}\, \vec{v} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{3}{4} \\ 0 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also folgende Schattenpunkte:
$A'\left(\frac{15}{16} \,|\, 0 \,|\, 0\right)$, $B'\left(4\frac{7}{16} \,|\, 0 \,|\, 0\right)$ und $S'\left(3\frac{3}{4} \,|\, 0 \,|\, 3\frac{1}{2}\right)$