Rotationsschwerkunkt und Tidenhub

Bernhard Möller

14. Juli 2014

Zusammenfassung

Um die Bahngleichungen sich in einem Gravitationsfeld befindlichen Massen zu bestimmen, kann man die Ausdehnung der Körper vernachlässigen und sich die gesamte Masse des Körpers im Massenschwerkunkt vereinigt vorstellen. Damit ein System von Massenpunkten in Ruhe ist, muss die Summe der inneren Kräfte verschwinden ($\sum_i \vec{F}_i^{(i)} = 0$). Diese Bedingung und die Äquivalenz von Gravitationsfeldern postuliert aber die Existenz eines gemeinsamen Rotationspunktes zweier umeinander rotierender Massen. Am Beispiel des Rotationssystems Erde - Mond, soll hier der Rotationsschwerpunkt im ersten Teil berechnen.

Teil zwei befasst sich mit den auftretenden Gezeitenkräften und den daraus resultierenden Gezeitenbeschleunigungen. Hierfür muss beachtet werden, dass es sich bei Mond und Erde um ausgedehnte Körper handelt.

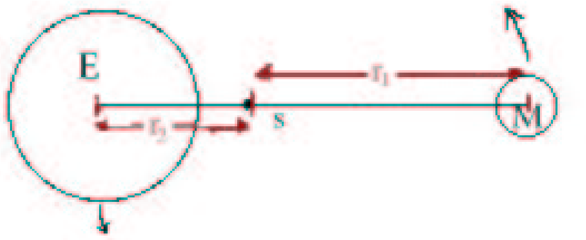
Problem. *Jedem wird gelehrt, dass der Mond für die Gezeiten verantwortlich ist. Dabei entstehen zwei Tidenmaxima, die sich auf der Erd-Mond-Achse befinden. Dabei ist die größere Tide dem Mond stets zugewandt, während sich die kleinere Tide auf der Planetenrückseite, dem Mond abgewandt, befindet.*

(a) Warum befindet sich auf der mondabgewandten Seite der Erde ein Tidenmaximum?

(b) Erde und Mond bilden ein dynamisches Zweikörpersystem. Genau genommen kreist der Mond nicht um die Erde, sondern Mond und Erde kreisen um einen gemeinsamen Punkt, den Rotationsschwerpunkt des Systems Erde – Mond. Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde beträgt ca. $384,4 \cdot 10^3 km$. *Die Masse des Mondes beträgt ein Einundachtzigstel der der Erde.*
Gib die Entfernung des Rotationsschwerpunktes relativ zur Erdoberfläche an.
Tip: Benutze die folgenden Gleichungen für die Berechnung:

$$\vec{F}_z = m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

1 Bestimmung des Rotationsschwerpunktes



(a) Da Erde und Mond ein Rotationssystem bilden und um einen gmeinsamen Punkt kreisen, ist die Erde einer Zentrifugalkraft ausgesetzt, die auf der mondabgewandten Seite als Folge der Überlagerung von Gravitations- und Zentrifugalkraft eine Veringerung der Anziehungskraft bewirkt. Durch diesen 'Sog' bildet sich ein Tidenmaximum aus. Dieser Effekt ist natürlich um einiges schwächer als die Gravitationswechselwirkung, die Ursache des größeren Tidenmaximums auf der mondzugewandten Seite ist. Dazu aber später mehr...

(b) Die Zentrifugalkraft wirkt der Zentripetalkraft entgegen, d.h. die Vektoren sind zueinander antiparallel und vom Betrag her gleich. Für die Zentrifugalkraft $\vec{F}_z^*$ gilt daher

$$\begin{aligned} \vec{F}_z^* &= -\vec{F}_z \\ \Rightarrow \vec{F}_z^* &= -m\,\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \end{aligned}$$

Diese Gleichung bringen wie mittels der zweiten Vektoridentität in eine andere Form.

$$\begin{aligned} \vec{F}_z^* &= -m\,\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \\ &= -m\big(\underbrace{\langle\vec{\omega}|\vec{r}\rangle}_{=0}\vec{\omega} - \langle\vec{\omega}|\vec{\omega}\rangle\,\vec{r}\big) \\ \Rightarrow \vec{F}_z^* &= m\omega^2\vec{r} \end{aligned}$$

Wie jetzt leicht zu sehen ist, wirkt die Zentrifugalkraft $\vec{F}_z^*$ entlang des Radiusvektors $\vec{r}$. Betrachten wir uns jetzt das Erde-Mond-System, haben wir es mit der Zentrifugalkraft des Mondes $\vec{F}_{z_M}^*$ und die der Erde $\vec{F}_{z_E}^*$ zu tun.

$$\vec{F}_{z_M}^* = m_M\omega^2\vec{r}_1$$

$$\vec{F}_{z_E}^* = m_E\omega^2\vec{r}_2$$

Da das Rotationssystem stabil ist, folgt:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{z_E}^* + \vec{F}_{z_M}^* &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{z_E}^* &= -\vec{F}_{z_M}^* \\ \Rightarrow m_E\omega^2\vec{r}_2 &= -m_M\omega^2\vec{r}_1 \\ \Leftrightarrow \vec{r}_2 &= -\frac{m_M}{m_E}\vec{r}_1 \quad ;\, m_E = 81 m_M \\ \Rightarrow \vec{r}_2 &= -\frac{1}{81}\vec{r}_1 \end{aligned}$$

Nun ist $\vec{r}_1 = r_1 \hat{r}_1$ und $\vec{r}_2 = r_2 \hat{r}_2$ mit $\hat{r}_1 = -\hat{r}_2$ und $\|\hat{r}_1\| = \|\hat{r}_2\| = 1$.

$$\Rightarrow \; r_2 = \frac{1}{81} r_1$$

$$\boxed{s = r_1 + r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = \frac{81}{82} s \\ r_2 = \frac{1}{82} s \end{cases}}$$

Setzt man nun die Werte ein und berücksichtigt den Erdradius von 6378km, dann erhält man eine Höhe des Rotationsschwerpunktes von ca. 1690,2km unterhalb der Erdoberfläche.

2 Berechnung der Gezeitenbeschleunigung

Um die Bahngleichungen eines Masseteilchens zu bestimmen, kann man die Ausdehnung dieser Körper vernachlässigen und sich die gesamte Masse m im Schwerpunkt dessen vereinigt vorstellen. Aber gerade im Gezeitenproblem müssen wir berücksichtigen, dass die Erde ein ausgedehnter Festkörper ist, wo an verschiedenen Punkten die Gravitationskraft des Mondes unterschiedlich groß sein kann.
Das heißt, zur Mondzugewandten Seite wirkt die Gravitationskraft des Mondes stärker und auf der Mondabgewandten Seite im gleichen Maße schwächer.
Das Newton'sche Gravitationsgesetz lautet:

$$F_G = G^* \frac{m_1 \, m_2}{s^2}$$

Die Differenz der Gravitationskraft ist daher gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\Delta F_G &= G^* \frac{m_M \, m_E}{2} \left[\frac{1}{(s - r_E)^2} - \frac{1}{(s + r_E)^2} \right] \\
&= G^* \frac{m_M \, m_E}{2} \, \frac{(s + r_E)^2 - (s - r_E)^2}{(s + r_E)^2 (s - r_E)^2} \\
&= G^* \frac{m_M \, m_E}{2} \, \frac{4 s \, r_E}{s^4 - 2(s \, r_E)^2 + r_E^4} \\
&= 2G^* \frac{m_M \, m_E}{s^3} \, \frac{r_E}{1 - 2\left(\frac{r_E}{s}\right)^2 + \left(\frac{r_E}{s}\right)^4} \\
&= 2G^* m_M \, m_E \frac{r_E}{s^3} \underbrace{\frac{1}{1 - 2\left(\frac{r_E}{s}\right)^2 + \left(\frac{r_E}{s}\right)^4}}_{\approx 1} \\
\Rightarrow \; \Delta F_G &\approx 2G^* m_E \, m_M \frac{r_E}{s^3}
\end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass die Gezeitenkräfte und Zentrifugalkräfte maximal für die $\vec{r}$ sind, für die $\vec{s} \| \vec{r}$ gilt. Allgemein gilt für Vektoren

$$\sum_i a_i \, b_i =: \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle := \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

Aus dem 2. Newton'schen Gesetz erhalten wir einen Ausdruck für die Beschleunigung.

$$F = m\,a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{F}{m}$$

Damit erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\Delta a = \frac{\Delta F_G}{m_E} \cos\alpha \quad \Rightarrow \Delta a = 2G^* m_M \frac{r_E}{s^3} \cos\alpha$$

Jetzt müssen wir nur noch die Zentrifugalbescheunigungen hinzuaddieren, um die Gezeitenbeschleunigungen zu erhalten.

- **mondzugewandte Tide:**
  Für die Zentrifugalbeschleunigung gilt hier

  $$a_z = \frac{F_z}{m} \cos\alpha = \omega^2 r \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad a_z = \omega^2 (r_E - r_2) \cos\alpha$$

  Durch Addition der Beschleunigungen erhalten wir die Gezeitenbeschleunigung: $a_{gez} = a + a_z$ und erhalten:

  $$\boxed{\begin{aligned} a_{gez} &= \left[2G^* m_M \tfrac{r_E}{s^3} + \omega^2 (r_E - r_2)\right] \cos\alpha \\ &= \left[2G^* m_M \tfrac{r_E}{s^3} + \omega^2 \left(r_E - \tfrac{1}{82} s\right)\right] \cos\alpha \end{aligned}}$$

- **mondabgewandte Tide:**
  Hier gilt für die Zentrifugalbeschleunigung

  $$a_z = \omega^2 (r_E + r_2) \cos\alpha$$

  Die Gezeitenbeschleunigung erhalten wir hier durch Subtrakion der Mondgravitationsbeschleunigung. Es gilt daher

  $$\boxed{\begin{aligned} a_{gez} &= \left[\omega^2 (r_E + r_2) - 2G^* m_M \tfrac{r_E}{s^3}\right] \cos\alpha \\ &= \left[\omega^2 \left(r_E + \tfrac{1}{82} s\right) - 2G^* m_M \tfrac{r_E}{s^3}\right] \cos\alpha \end{aligned}}$$