

Zykloiden

Bernhard Möller

3. Oktober 2012

Zusammenfassung

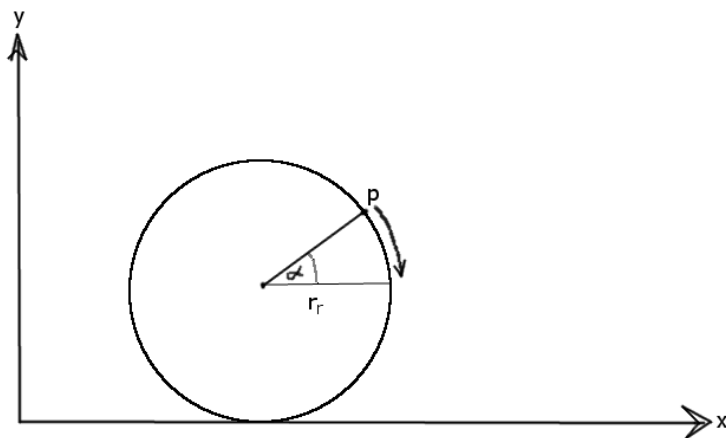
Zykloiden sind quasizyklische Bahnen, die durch Überlagerung einer konstanten Bewegung mit einer Kreisbewegung entstehen.

Am Beispiel eines rotierenden Rades, welches über eine glatte Fläche rollt, soll hier die Zykloidenproblematik diskutiert und die Bahngleichung einer Zykloide hergeleitet werden.

Problem (1). *Ein Rad mit Radius r_r rolle mit der Frequenz f auf einer glatten Ebene gerade aus.*

- 1. Leiten Sie die Bahngleichung γ eines Punktes auf dem Rand eines Rades her.
Tipp: Verwenden Sie die Parameterform.*
- 2. Verallgemeinern Sie die in (1) gefundene Lösung auf den Fall, dass der betrachtete Punkt den Radius $r_p \neq r_r$ vom Radmittelpunkt hat.*
- 3. Skizzieren Sie die Bahnkurve eines Punktes auf dem Rand des Rades, eines Punktes im Inneren des Rades ($r_p < r_r$) sowie eines Punktes auf dem Rand des Spurkranzes eines Eisenbahnrades ($r_p > r_r$).*

Skizze:



Problem (2).

1. Finden Sie eine Gleichung, die die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von t angibt, also $\vec{v} = \vec{v}(t)$. Wann ist die Geschwindigkeit maximal, wann erreicht sie ihr Minimum und wie groß ist sie dann in diesen Zeitpunkten?
2. Welche Beschleunigung erfährt dieser Punkt zum Zeitpunkt t und wohin ist sie gerichtet?
3. Ermitteln Sie die Strecke, die ein Punkt am Rand des Rades in der Zeit t zurücklegt, wenn die Radnarbe zum Zeitpunkt des Betrachtungsbeginns $t_0 = 0$ die Koordinaten $M(0|r_r)$ und der Punkt P die Startkoordinaten $P(r_r|r_r)$ besitzt, also $\alpha(0) = 0$ ist.

1 Problem (1)

1.1 Herleitung der Zykloidengleichung

Die Bewegung des Punktes lässt sich in eine y -Komponente und eine x -Komponente aufteilen, die wir vollkommen isoliert voneinander betrachten können. Die x -Komponente setzt sich dabei aus zwei unterschiedlichen Bewegungstypen zusammen – einer geradlinig gleichförmigen (wir setzen eine konstante Drehgeschwindigkeit des Rades voraus) und der Oszillation um die Radnarbe (hervorgerufen durch die Kreisbewegung um die Radnarbe).

Um eine geeignete Parametrisierung zu finden, führen wir noch einen Parameter für die Rotationsgeschwindigkeit des Rades ein und nennen ihn f (f für Frequenz). Nun ist $f := \frac{1}{T}$, wobei T die Zeit ist, die das Rad für eine Umdrehung benötigt. Die Frequenz ist also ein Maß für die Drehgeschwindigkeit des Rades. In der Zeit t wird der Winkel α überstrichen. Es gilt daher

$$\frac{t}{T} = \frac{\alpha}{360} \Leftrightarrow \alpha = \frac{360t}{T}.$$

Damit erhalten wir für den Winkel α die Funktion

$$\alpha(t) = 360ft.$$

Die Strecke, die die Radnarbe in der Zeit t zurücklegt, ist dann gegeben durch

$$x_r(\alpha) = 2\pi r_r \frac{\alpha}{360} \text{ und damit } x_r(t) = 2\pi r_r ft.$$

Um uns etwas Schreibarbeit zu ersparen, setzen wir $2\pi f =: \omega$. Damit erhalten wir für die Bewegung der Radnarbe

$$x_r(t) = \omega r_r t.$$

Jetzt kümmern wir uns um die oszillierende Komponente:

$$x_o(t) = r \cos(\alpha(t)) = r_r \cos(360ft)$$

Um eine einfachere Darstellung zu erhalten, gehen wir zum Bogenmaß über. Nun gilt ja

$$b(t) = \frac{2\pi}{360} \alpha(t) \wedge \alpha(t) = 360ft \Leftrightarrow b(t) = 2\pi ft = \omega t.$$

Wir müssen nun sicherstellen, dass die Drehrichtung des Rades mit der Bewegungsrichtung der Radnarbe korrespondiert. Dies ist nicht der Fall, da der Winkel sich mathematisch entgegen dem Urzeigersinn öffnet. Wir benötigen aber einen dem entgegengesetzten Drehsinn. Daher setzen wir für die oszillierenden Teile $t \mapsto -t$. Für den oszillierenden Teil der x -Komponente erhalten wir also

$$x_o(t) = r_r \cos(-\omega t) = r_r \cos(\omega t).$$

Die x -Komponente ist ja die Summe aus $x_r(t)$ und $x_o(t)$. Damit ist

$$x(t) = \omega r_r t + r_r \cos(\omega t).$$

Die y -Komponente besteht nur aus der Oszillationsbewegung des Punktes um die Radnarbe in y -Richtung. Die Radnarbe besitzt die y -Koordinate r_r . Also ist $y(t)$ gegeben durch

$$y(t) = r_r + r_r \sin(-\omega t) = r_r - r_r \sin(\omega t).$$

Für die Gesamtbewegung erhalten wir also

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r_r \begin{pmatrix} \omega t + \cos(\omega t) \\ 1 - \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

1.2 Verallgemeinerung auf den Fall $r_p \neq r_r$

Oben haben wir für unsere Überlegungen den Spezialfall betrachtet, dass sich der betrachtete Punkt auf dem Rand des Rades befindet. Diese Beschränkung wollen wir jetzt aufheben. Wir bekommen es jetzt mit zwei Radien zu tun, dem des Rades r_r und dem des betrachteten Punktes r_p . Die geradlinig-gleichförmige Bewegung der Radnarbe wird weiterhin von ω und dem Radius des Rades r_r bestimmt. Der Radius des Kreises, der durch die Kreisbewegung des Punktes beschrieben wird, hat aber den Radius r_p . Das heißt, der oszillierende Teil ist bestimmt von ω und r_p . Unsere Bahngleichung ändert sich also geringfügig und nimmt folgende Gestalt an:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \omega r_r t + r_p \cos(\omega t) \\ r_r - r_p \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Wir können jetzt r_r ausklammern und setzen $\epsilon := \frac{r_p}{r_r}$. Wir erhalten dann für die Zykloide folgende Darstellung:

$$\gamma(t) = r_r \begin{pmatrix} \omega t + \epsilon \cos(\omega t) \\ 1 - \epsilon \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

1.3 Skizzen

Jetzt gibt es drei Möglichkeiten:

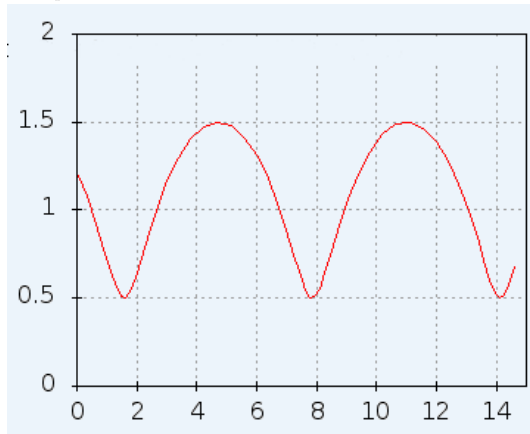
1. $r_p > r_r \Rightarrow \epsilon > 1$



2. $r_p = r_r \Rightarrow \epsilon = 1$



3. $r_p < r_r \Rightarrow \epsilon < 1$



2 Problem (2)

2.1 Geschwindigkeit des Punktes

Die Momentangeschwindigkeit $\vec{v}$ des Punktes P zum Zeitpunkt t ist gegeben durch die partielle Ableitung von γ nach t , also $\vec{v}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\gamma(t) = \dot{\gamma}(t)$. Es gilt also

$$\vec{v}(t) = \dot{\gamma}(t) = \omega r_r \begin{pmatrix} 1 - \epsilon \sin(\omega t) \\ -\epsilon \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Extremalgeschwindigkeiten von P :

Die Größe der Geschwindigkeit des Punktes P ist gegeben durch die Norm des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\gamma}(t)$, also $v(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$. Um die Stellen zu finden, in denen der betrachtete Punkt seine Maximalgeschwindigkeit v_{max} annimmt, suchen wir die Extrempunkte der Norm. Es gilt also die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\|\dot{\gamma}(t)\| = 0$$

zu lösen.

$$\begin{aligned} 0 &= \omega r_r \frac{d}{dt} \left\| \begin{pmatrix} 1 - \epsilon \sin(\omega t) \\ -\epsilon \cos(\omega t) \end{pmatrix} \right\| \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \sqrt{(1 - \epsilon \sin(\omega t))^2 + \epsilon^2 \cos^2(\omega t)} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \sin(\omega t)} \\ \Leftrightarrow 0 &= -\frac{\epsilon \omega \cos(\omega t)}{\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \sin(\omega t)}} \end{aligned}$$

Nun gibt es zwei Fälle zu untersuchen:

1. $\epsilon \in]0, 1]$:

Für $0 < \epsilon \leq 1$ ist die Gleichung für alle t definiert. Die Lösung ergibt sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\epsilon \omega \cos(\omega t)}{\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \sin(\omega t)}} \\ \Leftrightarrow 0 &= \cos(\omega t) \\ \Rightarrow t &= \frac{(2k-1)\pi}{2\omega}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Um zu untersuchen, bei welchen Stellen, die Maxima und Minima liegen, bilden wir die zweite Ableitung und setzen unsere Lösungen ein.

$$\frac{d^2}{dt^2} \|\dot{\gamma}(t)\| = \epsilon \omega^2 \frac{\sin(\omega t) \sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \sin(\omega t)} - \frac{2\epsilon \cos^2(\omega t)}{\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \sin(\omega t)}}}{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \sin(\omega t)}$$

Aus

$$\sin\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}\right) = -1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

folgt

$$\frac{d^2}{dt^2} \left\| \dot{\gamma}\left(\frac{(4k-1)\pi}{2\omega}\right) \right\| = -\epsilon \omega^2 \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon}}{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon} = -\frac{\epsilon \omega^2}{1 + \epsilon} < 0$$

Bei

$$t = \frac{(4k-1)\pi}{2\omega}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

liegen also die Geschwindigkeitsmaxima und die Maximalgeschwindigkeit $\vec{v}_{max}$ ist gegeben durch

$$\vec{v}_{max} = \omega r_r \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

folgt

$$\frac{d^2}{dt^2} \left\| \dot{\gamma}\left(\frac{(4k+1)\pi}{2\omega}\right) \right\| = \epsilon \omega^2 \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon}}{1 + \epsilon^2 - 2\epsilon} = \frac{\epsilon \omega^2}{1 - \epsilon} > 0$$

Bei

$$t = \frac{(4k+1)\pi}{2\omega}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

liegen also die Geschwindigkeitsminima und die Minimalgeschwindigkeit $\vec{v}_{min}$ ist gegeben durch

$$\vec{v}_{min} = \omega r_r \begin{pmatrix} 1 - \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\epsilon \in]1, \infty[$:

Für $\epsilon > 1$ ergeben sich Lücken in der Definitionsmenge der Gleichung $\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}(t)\| = 0$, in deren Mitte gerade die Minima aus (1) liegen. Zu bestimmen sind also die Intervalle, die aus der Definitionsmenge herausfallen. Da die Diskriminante nicht negativ werden darf, ist unser Ansatz

$$\begin{aligned} 0 &> 1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \sin(\omega t) \\ \Leftrightarrow \sin(\omega t) &> \frac{1 + \epsilon^2}{2\epsilon} \end{aligned}$$

Aufgrund der Periodizität des Sinus erhalten wir im Intervall $[0, 2\pi]$ folgende Lösung:

$$\begin{aligned}
t &> \frac{\arcsin\left(\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}\right)}{\omega} \quad \text{und} \quad t < \frac{\pi - \arcsin\left(\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}\right)}{\omega} \\
\Leftrightarrow \quad &\frac{\arcsin\left(\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}\right)}{\omega} < t < \frac{\pi - \arcsin\left(\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}\right)}{\omega} \\
\Leftrightarrow \quad &t \in \left[\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}\right)}{\omega}, \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}\right)}{\omega} \right]
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir dann folgende Definitionsmenge für die zu lösende Gleichung:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}_+ \setminus \left(\bigcup_{k=0}^n \left[\frac{\frac{(4k+1)\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}\right)}{\omega}, \frac{\frac{(4k+1)\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}\right)}{\omega} \right] \right)$$

Die Geschwindigkeitsminima sind allesamt Randminima mit $v_{\min} = 0$.

2.2 Beschleunigung des Punktes

Die Beschleunigung $\vec{a}$ des Punktes P zum Zeitpunkt t ist gegeben durch die zweite partielle Ableitung von γ nach t , also $\vec{a}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gamma(t) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\gamma}(t)$. Es gilt also

$$\vec{a}(t) = \ddot{\gamma}(t) = -\omega^2 r_r \epsilon \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Der Punkt erfährt also eine zur Radnarbe gerichtete Beschleunigung, die in ihrer Größe konstant ist. Denn leicht rechnet man nach, dass $\|\ddot{\gamma}(t)\| = \omega^2 r_r$ ist.

2.3 Wegstrecke des Punktes P

2.3.1 Das Kurvenintegral der ersten Art

Um die Länge l der Kurve γ in einem beliebigen Intervall zu berechnen, unterteilen wir die Kurve in kleine, Wegestücke und summieren sie auf:

$$l \approx \sum_k \Delta l_k = \sum_k \|\gamma_{k+1} - \gamma_k\| = \sum_k \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|$$

Wir setzen nun $\Delta t := t_{k+1} - t_k$ und erhalten

$$(*) \quad l \approx \sum_k \|\gamma(t_k + \Delta t) - \gamma(t_k)\| =: \sum_k \|\Delta \gamma_k\|.$$

Nun ist

$$\Delta\gamma(t_k) = \begin{pmatrix} \Delta x(t_k) \\ \Delta y(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x(t_k+\Delta t)-x(t_k)}{\frac{y(t_k+\Delta t)-y(t_k)}{\Delta t}} \Delta t \\ \frac{y(t_k+\Delta t)-y(t_k)}{\Delta t} \Delta t \end{pmatrix} = \Delta t \begin{pmatrix} \frac{x(t_k+\Delta t)-x(t_k)}{\frac{y(t_k+\Delta t)-y(t_k)}{\Delta t}} \\ \frac{y(t_k+\Delta t)-y(t_k)}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

Dies setzen wir in (*) ein und erhalten

$$l \approx \sum_k \left\| \Delta t \begin{pmatrix} \frac{x(t_k+\Delta t)-x(t_k)}{\frac{y(t_k+\Delta t)-y(t_k)}{\Delta t}} \\ \frac{y(t_k+\Delta t)-y(t_k)}{\Delta t} \end{pmatrix} \right\| = \sum_k \Delta t \left\| \begin{pmatrix} \frac{x(t_k+\Delta t)-x(t_k)}{\frac{y(t_k+\Delta t)-y(t_k)}{\Delta t}} \\ \frac{y(t_k+\Delta t)-y(t_k)}{\Delta t} \end{pmatrix} \right\|$$

Jetzt können wir Δt gegen Null gehen lassen und erhalten als Grenzwert

$$l = \int \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} \end{pmatrix} \right\| dt =: \int \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Dieses Integral nennt man *Kurvenintegral* oder auch *Linienintegral*.

Man schreibt für

$$\int \|\dot{\gamma}(t)\| dt \text{ häufig auch } \int_{\gamma} dt$$

und meint damit anschaulich die Integration entlang des Weges γ .

Natürlich ist das oben hergeleitete Integral ein sehr spezielles Kurvenintegral. Die Definition des allgemeinen Kurvenintegrals erster Art ist ein Integral über ein Skalarfeld und lautet wie folgt:

Definition 2.1 (Kurvenintegral 1. Art). *Es sei*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

ein integrierbares Skalarfeld gegeben. $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ sei eine partiell differenzierbare Kurve und $\gamma(t)$ ihre Parametrisierung. Das Kurvenintegral entlang des Weges $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist dann gegeben durch

$$\int_{\gamma} f(x) dx = \int \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t) | f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \rangle} dt = \int f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

wobei, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ das Skalarprodukt ist.

Bemerkung. *Wir erhalten unseren Spezialfall, wenn wir $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{D}_F$ setzen.*

2.3.2 Anwendung auf das Problem

Um die Länge l zu berechnen, müssen wir also das Kurvenintegral über γ auswerten. Also

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{\gamma} dt = \int \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= \omega r \int \sqrt{(1 - \sin(\omega t))^2 + \cos^2(\omega t)} dt \\ &= \sqrt{2} \omega r \int \sqrt{1 - \sin(\omega t)} dt \end{aligned}$$

Wir substituieren mit $u := \sin(\omega t)$ und erhalten

$$I(u) = \sqrt{2}r \int \frac{\sqrt{1-u}}{\cos(\arcsin u)} du.$$

Zu beachten ist hier, dass $\arcsin u$ nur über das Intervall $[-1, 1]$ definiert ist. $I(t)$ ist also nur für $t \in [-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}]$ definiert. Die Länge der Kurve γ wird sich also über die Summe ihrer Einzelabschnitte ergeben. Wir werden jetzt zunächst das Integral $I(t)$ auswerten:

$$\begin{aligned} I(u) &= \sqrt{2}r \int \frac{\sqrt{1-u}}{\cos(\arcsin u)} du \\ &= \sqrt{2}r \int \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin u)}} du \\ &= \sqrt{2}r \int \sqrt{\frac{1-u}{1-u^2}} du \\ &= \sqrt{2}r \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} du \\ &= \sqrt{8}r \sqrt{1+u} du \end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt

$$I(t) = \sqrt{8}r \sqrt{1+\sin(\omega t)} + C.$$

Für den zurückgelegten Weg über den Definitionsbereich erhalten wir

$$l(t) \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} = I\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) - I\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right) = \sqrt{8}r \left(\sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \sqrt{1+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \right) = 4r.$$

Um die Länge $l|_0^t$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}_+$ zu berechnen, nehmen wir eine Zerlegung des Betrachtungsintervalls $[0, t]$ wie folgt vor:

$$[0, t] = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k\pi}{\omega}, \frac{(k+1)\pi}{\omega} \right] + \left[\frac{n\pi}{\omega}, t \right]$$

Dabei ist n die Anzahl der Halbumdrehungen, die das Rad in der Zeit t vollzieht. Wir führen die Gaußklammern und den Modulo-Operator ein, um einen Term für n angeben zu können.

Definition 2.2 (Gaußklammer). *Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto \lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} \end{aligned}$$

heißt Gaußklammer von x . Die Gaußklammer wird auch Abrundungsfunktion genannt.

Definition 2.3 (Modulo-Operator). Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ gegeben. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{mod} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longmapsto x \bmod y := \begin{cases} x - \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor y & \text{für } x \geq 0 \\ x - \left(\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor y + 1 \right) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

heißt *Modulo-Operator*.

Bemerkung. Der Modulo-Operator gibt bei einer Division den Rest zurück.

Wir können jetzt also eine allgemeine Gleichung für die Länge der Kurve γ im gegebenen Zeitintervall angeben:

$$\begin{aligned} l(t) := l|_0^t &= 4r \left\lfloor \frac{\omega t}{\pi} \right\rfloor + \sqrt{8\pi r} \sqrt{1 + \sin \left(\omega \left(t \bmod \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \right) \right)} \\ \Leftrightarrow l(t) &= 4r \left(\left\lfloor \frac{\omega t}{\pi} \right\rfloor + \pi \sqrt{\frac{1 + \sin \left(\omega \left(t \bmod \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \right) \right)}{8}} \right) \end{aligned}$$